

Représentations de l'incertitude scientifique : pour un Bayésianisme élargi

J.-M. Tallon & J.-C. Vergnaud
EUREQua, CNRS-Université Paris I

Introduction

Dans cet exposé: présente de manière critique l'approche bayésienne « dominante » en théorie de la décision ainsi que les débats actuels dans ce champ disciplinaire.

Position défendue: la théorie bayésienne est trop réductrice pour donner les outils adéquats à une réflexion analytique sur les incertitudes scientifiques. En revanche, des outils existent et peuvent être mobilisés avec profit pour enrichir l'analyse et la représentation des incertitudes scientifiques.

Plan

- I Le cadre Bayésien : une vision cohérente mais des outils restrictifs
- II Vers une quantification moins restrictive de l'incertitude
- III Quelques implications économiques

I. Cadre Bayésien

Un langage pour la décision

Présente le problème de décision

- en séparant les conséquences des contingences (état de la nature)
- en développant des arbres de décision qui permettent de saisir la séquentialité des choix et l'arrivée d'information

Propose le modèle de l'utilité espérée

- critère qui repose sur des fondements axiomatiques justifiant la rationalité de la démarche
- traitement des arbres de décision par technique d'optimisation dynamique et recours à la règle de Bayes pour la révision des croyances

Critère de décision Bayésien

Théorie bayésienne: le critère rationnel qu'il faut utiliser est de chercher la décision qui rend maximale **l'espérance d'utilité**

Les conséquences des actions sont évaluées dans chaque état de la nature possible par la fonction d'utilité (reflétant les goûts).

La décision qui donne l'utilité **moyenne** la plus élevée est celle qui doit être retenue: procède ainsi à une comparaison/agrégation des coûts et avantages des décisions dans tous les états possibles.

Pour l'aide à la décision publique

La mise en œuvre demande :

- une évaluation économique des conséquences (neutralité au risque du décideur public)
- l'incertitude doit être quantifiée sous forme de probabilités

Sources des probabilités?

- fréquences, probabilités populationnelles dans le domaine de la prévention,
- probabilités subjectives d'experts,

A noter : impossibilité d'agréger des préférences EU avec probabilités différentes

Difficultés individuelles à se conformer au modèle

Des biais psychologiques très connus

- effet de contexte
- heuristique de la représentativité
- distorsion des probabilités
- difficultés avec la règle de Bayes (conservatisme, surreprésentativité...)

Toutefois, un entraînement des experts peut limiter ces biais...

Incertitude et probabilités subjectives

Remise en cause du modèle d'espérance subjective d'utilité, sur la base de choix observés. Expérience d'Ellsberg (1961).

Doit tirer une boule dans une urne qui contient 90 boules. Parmi ces 90 boules, 30 sont **Rouges**, 60 **Jaunes** ou **Vertes**.

	R	J	V
Parier sur R	1	0	0
Parier sur J	0	1	0
Parier sur R ou V	1	0	1
Parier sur J ou V	0	1	1

Choix le plus souvent observés

Parier sur **R** plutôt que sur **J** : « révèle » alors $\text{proba}(\mathbf{R}) > \text{proba}(\mathbf{J})$

Parier sur **R** ou **V** plutôt que sur **J** ou **V** : « révèle » alors $\text{proba}(\mathbf{R}) + \text{proba}(\mathbf{V}) < \text{proba}(\mathbf{J}) + \text{proba}(\mathbf{V})$

Incertitude et probabilités subjectives

Remise en cause du modèle d'espérance subjective d'utilité, sur la base de choix observés. Expérience d'Ellsberg (1961).

Doit tirer une boule dans une urne qui contient 90 boules. Parmi ces 90 boules, 30 sont **Rouges**, 60 **Jaunes** ou **Vertes**.

	R	J	V
Préférer sur R	1	0	0
Préférer sur J	0	1	0
Préférer sur R ou V	1	0	1
Préférer sur J ou V	0	1	1

Au total, si veut plaquer le modèle d'espérance d'utilité sur ses choix, parvient à une contradiction...

Pourtant, choix aisément justifiables: aversion pour le manque d'information

Conclusions expérience d'Ellsberg

Même dans des situations de choix très simples, n'agit en général pas comme si il existait une probabilité subjective.

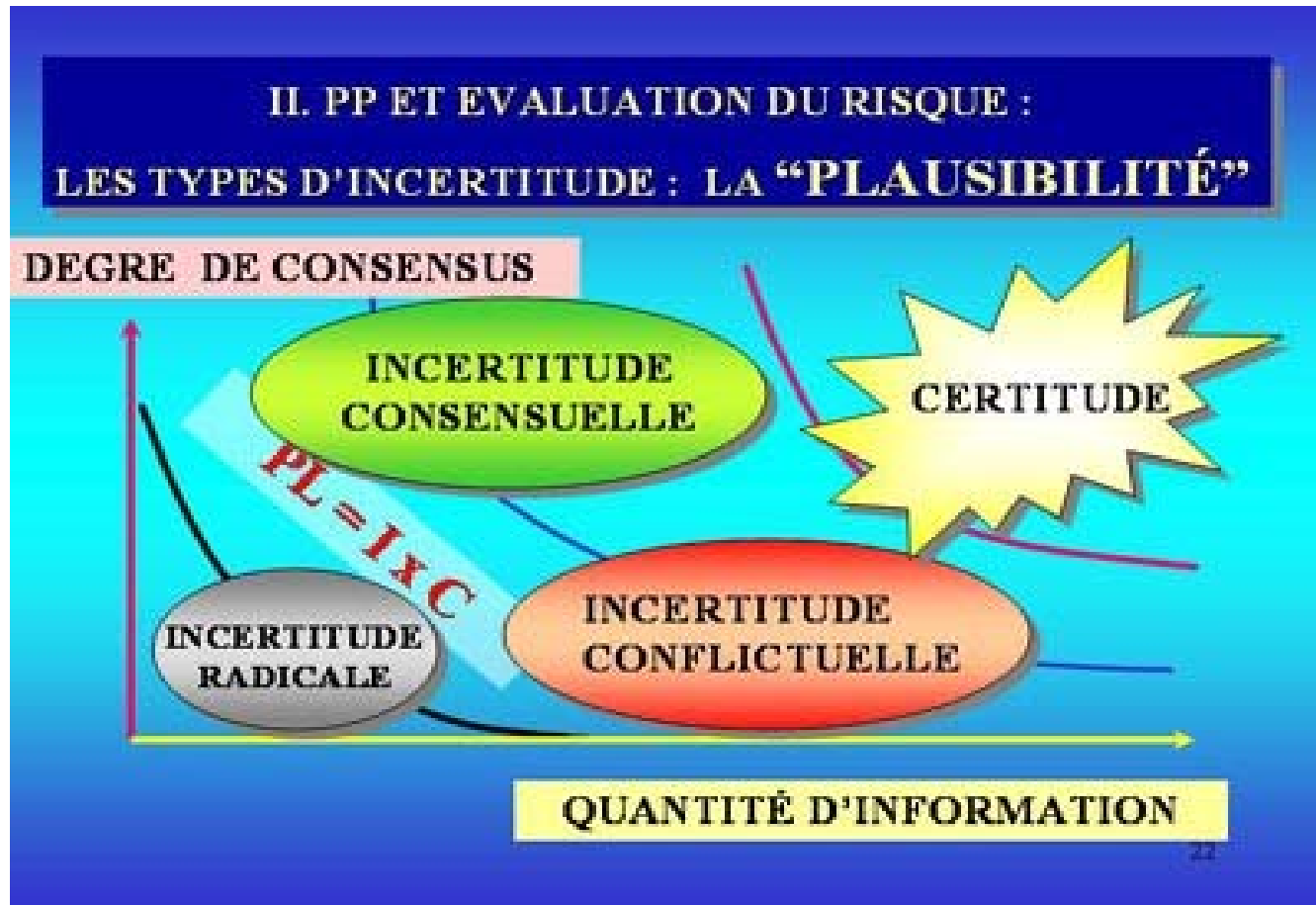
Difficulté **cognitive** à « tout probabiliser » ou, plus fondamentalement, reconnaissance d'une différence profonde entre des situations de **risque** (probabilisé) et des situations **d'incertitude** (non probabilisée)'

Egalement...

Lorsque les personnes se sentent peu compétentes, présentent des degrés de croyance sous-additives : $P(E)+P(E^C)<1$

Dans des situations d'incertitude scientifique, comment tenir compte des controverses et du manque de connaissance?

Les différentes situations



En résumé

Cadre Bayésien offre une démarche cohérente pour la décision

Mais l'outil probabiliste n'est peut être pas pertinent dans toutes les situations...

II. Vers une quantification moins restrictive de l'incertitude

1. Description de données non probabilistes
2. Modèles de décision statiques
3. Information et dynamique

Approches objectives

Théorie bayésienne (à la Savage): probabilité **subjective**, représentant des **degrés de croyance**. Pas de représentation explicite de l'information disponible.

A l'inverse, peut avoir une approche plus « objective » de l'information et essayer de relier les degrés de croyance aux informations disponibles.

Pose le problème de savoir comment représenter une information qui ne serait pas probabiliste/fréquentiste.

Doit développer des outils « proches des données disponibles ».

1. Description de données non probabilistes

Quantitatif vs qualitatif

- Peut grossièrement distinguer deux types d'information non probabiliste:
 - Information quantitative:
 - intervalles de probabilités, probabilités imprécises, fonctions de croyances,...
 - ensemble de probabilités venant d'experts
 - Information qualitative:
 - plausibilité d'hypothèses scientifiques

Intervalles de probabilités

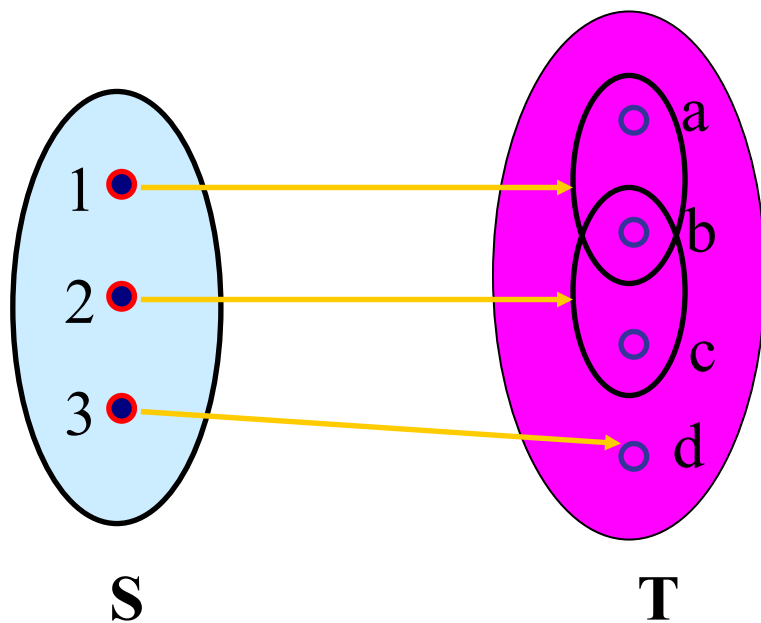
Incertitude sur la valeur de la « vraie probabilité »: peut donner uniquement des bornes sur cette valeur.

Exemples:

- Statistique classique/intervalle de confiance
- Base de données incomplète

Fonctions de croyances

Outil utilisé en statistique, quand on dispose d'informations sur une variable qui n'est pas directement la variable d'intérêt, mais qui apporte quand même une information.

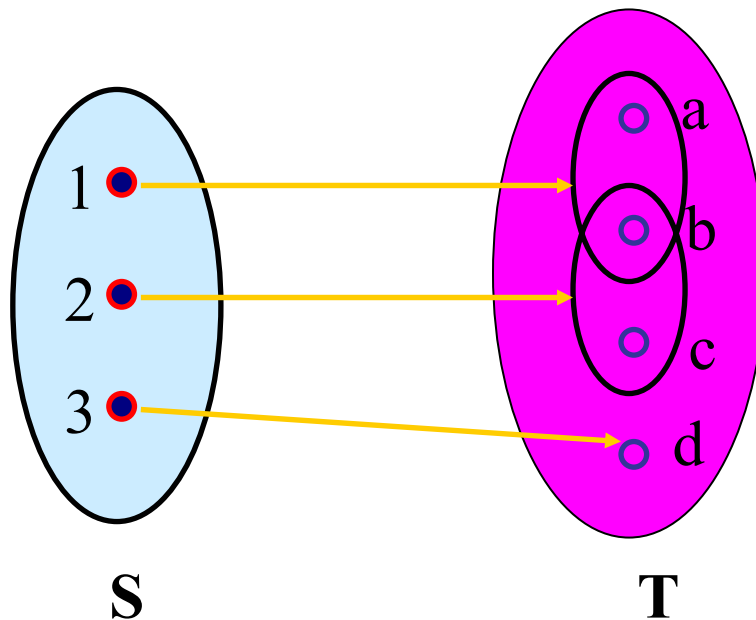


Fonctions de croyances

Suppose une information sur **S**: $\text{pr}(1)=1/2$, $\text{pr}(2)=1/3$, $\text{pr}(3)=1/6$.

Que peut-on en inférer sur **T**? $\text{pr}(a,b)=1/2$, $\text{pr}(b,c)=1/3$, $\text{pr}(d)=1/6$

Mais, ne peut pas « répartir » le poids sur $\{a,b\}$, en un poids spécifique pour a d'un côté et pour b de l'autre.



Distribution de possibilité

Description qualitative de l'incertitude: exprime des «degrés de possibilité». $\pi(s)$ est le degré de possibilité de l'état s . N'a pas la structure d'une distribution de probabilité.

$\Pi(E) = \max\{\pi(s), s \in E\}$ est le degré de possibilité de l'événement E

Source: avis d'experts?

Remarque: peut très bien se trouver dans des situations où un événement est possible ($\Pi(E)=1$) et son complément est également possible ($\Pi(E^c)=1$)

Exemples: -Incertitude totale $\Leftrightarrow \pi(s) = 1$ pour tout s

-Situation « mixte »: $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = .5$, $\pi(3) = 0$, $\pi(4) = 1$

2. Modèles de décision statiques

Critères de décision avec familles de probabilité

Cadre: intervalle de probabilité, fonctions de croyances,...

Questions: comment traiter cette famille de probabilité?, comment l'incorporer dans un critère de décision? Quelles sont les propriétés de ce critère?

Aversion pour l'imprécision: critère de décision

Données disponibles: famille P de distributions de probabilité sur l'ensemble des états de la nature.

Critère découlant d'une axiomatique basée sur l'aversion pour l'imprécision:

$$V(d) = a * \min_{p \in P} E_p u(d) + (1-a) * E_{\pi} u(d)$$

a: coefficient d'aversion pour l'imprécision, compris entre 0 et 1
 π : probabilité « de référence », contrainte par l'axiomatique...

Aversion pour l'imprécision: remarques

$$V(\mathbf{d}) = a * \min_{p \in P} E_p u(\mathbf{d}) + (1-a) * E_{\pi} u(\mathbf{d})$$

Forme très flexible, permettant de modéliser un comportement allant d'un extrême pessimisme ($a=1$) à une neutralité vis-à-vis de l'incertitude sur les données probabilistes ($a=0$, qui revient au modèle bayésien).

Dissocie *description* des données de l'*attitude* du décideur vis-à-vis de l'imprécision de ces données.

In fine, évalue la décision à l'aide d'une distribution de probabilité, mais la distribution change selon la décision.

Exemple

	R	J	V
Parier sur R	1	0	0
Parier sur J	0	1	0
Parier sur R ou V	1	0	1
Parier sur J ou V	0	1	1

$$V(\mathbf{R}) = \frac{1}{3}a + (1-a)\frac{1}{3}$$

$$V(\mathbf{J}) = 0a + (1-a)\frac{1}{3}$$

$$V(\mathbf{R}, \mathbf{V}) = \frac{1}{3}a + (1-a)\frac{2}{3}$$

$$V(\mathbf{J}, \mathbf{V}) = \frac{2}{3}a + (1-a)\frac{2}{3}$$

Ensemble de probabilité: $P = \{(p_R, p_J, p_V) \mid p_R = 1/3 \text{ \& } p_J + p_V = 2/3 \}$

Probabilité de référence: $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$

Autres modèles (subjectivistes)

Modèle Maxmin Eu ou « multiple priors » de Gilboa et Schmeidler:

$$V(d) = \min_{p \in \mathbf{P}} E_p u(d)$$

où \mathbf{P} est totalement subjectif. Ne revient à du pessimisme extrême que si l'on assimile (à tort?) \mathbf{P} avec l'information disponible.

Modèle d'espérance d'utilité à la Choquet de Schmeidler: basé sur l'intégrale de Choquet. Peut parfois s'interpréter comme un cas particulier du modèle maxmin Eu, quand \mathbf{P} est décrit par une fonction de croyances par exemple.

Possibilité et intégrale de Sugeno

Description qualitative de l'incertitude *via* une distribution de possibilité: comment l'utiliser dans un critère de décision?

Intégrale de Sugeno:

n'utilise que les opérateurs « qualitatifs » min et max. Possède une version « optimiste » et une version « pessimiste ».

Revient à mettre l'accent sur des comparaisons entre la plausibilité d'un événement et l'utilité dans cet événement.

Se prête à des calculs simples.

Exemple

Deux états: S et NS

Deux décisions: I et NI

$$\text{Poss}(S)=.5 \text{ et } \text{Poss}(NS)=1$$

$$\text{Néc}(S)=1-\text{Poss}(NS)=0$$

$$\text{Néc}(NS)=1-\text{Poss}(S)=.5$$

	S	NS
I	.4	.6
NI	.2	1



	Critère optimiste	Critère pessimiste
I	.6	.4
NI	1	.2

Exemple

Deux états: S et NS

Deux décisions: I et NI

$$\text{Poss}(S)=.5 \text{ et } \text{Poss}(NS)=1$$

$$\text{Néc}(S)=1-\text{Poss}(NS)=0$$

$$\text{Néc}(NS)=1-\text{Poss}(S)=.5$$

	S	NS
I	.4	.6
NI	.2	1



	Critère optimiste	Critère pessimiste
I	.6	.4
NI	1	.2

3. Information et dynamique

Révision des croyances et des connaissances

Aspect crucial pour le Principe de Précaution et de manière générale pour évolution de l'incertitude scientifique.

- Apprendre avant d'agir ou non?
- Quelle formalisation pertinente de l'évolution de l'incertitude?
- L'anticipation d'un apprentissage doit-il jouer dans les décisions présentes?

Le modèle de l'espérance d'utilité propose une prise en compte cohérente de l'apprentissage.

Peut-être une vision trop restrictive?

La dynamique du modèle Bayésien

- une formalisation de l'information
- la règle de Bayes comme règle de révision des probabilités subjectives
- optimisation dynamique pour déterminer le plan d'action optimal

L'information

Soit:

- un événement restreignant l'ensemble des états de la nature possible : «tirage d'un chiffre pair (roulette) »

- un signal dont on connaît les corrélations statistiques avec le vrai état de la nature sous-jacent:

«résultat positif d'un test de dépistage »

Pour traiter cette info, besoin de connaître le taux de faux-positifs et de faux-négatifs

Un ordre partiel sur l'informativité des structures d'information a été caractérisé:

« plus d'information = plus de dispersion des croyances futures »

Règle de Bayes

Justifiée classiquement dans le cas des probabilités objectives

Plus récemment pour les probabilités subjectives par un axiome de cohérence dynamique :

Si préférence de a envers b
conditionnellement à E et à $S \setminus E$
alors préfère a à b inconditionnellement

Limites apparentes

- Formalisation de l'information pertinente pour un univers de risque probabilisé. Information scientifique?
- Pas de surprise avec la règle de Bayes: rien sur le conditionnement par rapport à des événements de probabilité nulle et de toute façon ne pèse pas dans les décisions présentes
- Pas de résultat intuitif sur la demande d'information: plus d'aversion au risque ne conduit pas à être plus friand d'information
- L'information n'apparaît pas comme une réduction du risque (de toute façon, pas de classement intrinsèque des probabilités)

L'apprentissage dans les modèles non-Bayésiens

Suggestions d'autres dynamique de l'apprentissage

Compatible avec les techniques d'optimisation dynamique

Une formalisation plus riche où l'évolution de l'incertitude et sa traduction dans les comportements paraissent plus intuitives

Evolution des données probabilistes imprécises

Une imprécision allant en se réduisant sous l'effet de

- nouvelles données statistiques (fusion de données),
- observation des fréquences...

... et se traduisant par une réduction de la famille de probabilité

Evolution des croyances possibilistes

Vers des croyances plus précises: une réduction des possibilités

$$\pi^0 \geq \pi^1$$

- élimination d'hypothèses,
- fusion de deux avis complémentaires d'experts

$$\pi^1 = \text{Min}(\pi^0, \pi'^0)$$

...ou des croyances moins précises

- prise en compte de nouvelles hypothèses,
- fusion d'avis contradictoires d'experts

$$\pi^1 = \text{Max}(\pi^0, \pi'^0)$$

Incertitude, information

Cadre où on dispose d'un ordre partiel sur l'incertitude...

- famille de probabilités plus grande,
- distribution de possibilités à valeurs plus élevées

... qui s'étend naturellement en dynamique: de meilleures informations correspondent à l'anticipation d'une plus faible incertitude.

III. Conséquences économiques

Remises en cause de quelques enseignements en économie du risque

- Prise en compte de l'incertitude dans la décision publique
- Défaillance des marchés pour le partage de l'incertitude

Quelles conséquences pour la décision publique?

Approche habituelle: théorème de Arrow-Lind. Le décideur public doit agir, dans ses décisions d'investissement, comme un décideur **neutre vis-à-vis du risque**. Pas d'aversion pour le risque au niveau de la décision publique!

Résultat établi dans le cadre de **l'espérance d'utilité**. Intuition: le risque est réparti sur une grande population. Chaque individu n'en supporte qu'une infime partie. Or, pour des « petits risques » un maximisateur de l'espérance d'utilité est neutre vis-à-vis du risque.

Résultat n'est plus vrai en présence d'ambiguïté: même pour des « petits risques », un décideur peut avoir de l'aversion pour l'incertitude/l'imprécision.

Quelles conséquences pour la décision publique?

Intuition *technique*: le critère de décision n'est pas différentiable au point de certitude.

Intuition *économique*: la situation de certitude a un attrait particulier. Pour s'en éloigner un peu, le décideur demande une « prime d'incertitude ».

Conséquence:

Même s'il répartit le risque largement dans la population, le décideur public doit prendre en compte les aversions envers l'incertitude des acteurs économiques.

Ne peut pas appliquer un critère ignorant la psychologie des agents.

Partage de l'incertitude

Présence d'incertitude a des conséquences sur les échanges possibles et les possibilités d'assurance.

Partage « optimal » de l'incertitude dans un cadre maxmin Eu: intuitions proches du partage optimal du risque dans un cadre Eu. Poids principal pèse sur les agents ayant le moins d'aversion vis-à-vis de l'incertitude.

Partage de l'incertitude par les marchés financiers:

- possibilité de **défaillances** de marché, lorsque le rendement des titres est trop ambigu.
- explication du peu de succès des *Cat Bonds*?
- principe de diversification (loi des grands nombres) remis en cause.

Conclusions

IPCC: Science vs « science for policy »; dans le deuxième cas, recours aux probabilités subjectives serait justifié...

A proposé ici un cadre permettant, dans une certaine mesure, de « réconcilier » les deux.

- Des outils existent, permettant de dépasser l'analyse bayésienne.
- Modifient sensiblement certaines conclusions de théorie économique (partage du risque...)
- Passage à une analyse alternative complète:
 - accroissement d'incertitude et comparaison d'aversion pour l'incertitude?
 - apprentissage et révision des croyances?
 - optimisation dynamique?
- Des outils plus opérationnels?